Title	$H'(U^n)$についての2,3の話 (フーリエ解析)
Author(s)	薮田, 公三
Citation	数理解析研究所講究録 (1971), 110: 47-57
Issue Date	1971-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/106372
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
110巻 1971年 47-57

$H^1(U^n)$についての2,3の話

東北大 理　　薮田公三

§1. 序

Unit Polydisc U^n上のHardy classの研究は，主としてA. Zygmundによって，境界近傍の挙動に関して行われた。その後W. Rudinは一次元の時の色々な事実が$n(\geq 2)$変数のときどこまで成立つかを組識的に調べ，その結果をレクチャーノートとしてまとめている〔3〕。この小論においては彼のやり残したうちの$H^1(U^n)$のextreme pointsとextremum problemsについて調べてみる。そのために定義をいくつか列挙する。

- U^n; open unit polydisc $\{z=(z_1,\cdots,z_n);\ |z_1|<1,\cdots,|z_n|<1\}$
- T^n; U^nのdistinguished boundary $\{w;\ |w_1|=\cdots=|w_n|=1\}$
- m_n; T^n上の正規化されたHaar measure
- $H(U^n)$; U^n上の正則函数の全体
- $N(U^n)$; $\{f\in H(U^n);\ \sup_{0<r<1}\int_{T^n}\log^+|f(rw)|dm_n(w)<+\infty\}$
- $N_*(U^n)$; $\{f\in N(U^n);\ \{\log^+|f(rw)|;\ 0<r<1\}$が一様可積分な族を作る$\}$

- $H^p(U^n)$; $\{f \in N_*(U^n) ; \int_{T^n} |f(rw)|^p dm_n(w) < +\infty\}$ $(0 < p \leq \infty)$
- $f^*(w)$; U^n上の函数$f(z)$に対して$\lim_{r \to 1} f(rw)$ $(w \in T^n)$が存在するとき，fのradial limitと呼び，$f^*(w)$と書く。
- $P[f]$; fのPoisson積分
- $u[f]$; $f \in N(U^n)$で$f \neq 0$のとき，$\log|f|$の最小のn-harmonic majorentのことを$u[f]$と書く。
- $f \in H(U^n)$がouterであるとは，$f \in N_*(U^n)$で$\log|f(0)| = \int_{T^n} \log|f^*(w)| dm_n(w)$が成り立つことをいう。
- $f \in H(U^n)$がinnerであるとは$f \in H^\infty(U^n)$で$|f^*| = 1$ a.e. on T^nのことをいう。

§ 2. $N_*(U^n)$の基本的なLemma

<u>Lemma 1.</u> a) $f \in N(U^n)$, $f \neq 0$ならば

f^*は殆んど全てのT^n上の点に対して存在し，$\log|f^*| \in L^1(T^n)$であり，又，次のようなsingular measure σ_fが存在する，

$$u[f] = P[\log|f^*| + d\sigma_f]。$$

b) 次の3つの命題は同値である。($f \in N(U^n)$の下に)

(1) $f \in N_*(U^n)$

(2) $u[f] \leq P[\log|f^*|]$, i.e. $\sigma_f \leq 0$

(3) $\log|f| \leq P[\log|f^*|]$。 ([3] P.47)

<u>Lemma 2.</u> $f \in N_*(U^n)$ のとき $(0 < p \leq \infty)$

$f \in H^p(U^n) \iff |f^*|^p \in L^1(T^n)$。 ([3] p51)

<u>Lemma 3.</u>

f : outer $\iff f \in N_*(U^n)$, $1/f \in N_*(U^n)$。

§3. $H^1(U^n)$ $(n \geq 2)$ の extreme point と outer function の関係.

まず，一次元の時のものが平行に成立する定理を述べる。

$\boxed{\text{Th. 1}}$ outer function (norm 1) は $H^1(U^n)$ の単位球 S の extreme point である。

$\boxed{\text{Th. 2}}$ $f = gh$; g : inner, $h \in H^1(U^n)$ と分解できるならば f は S の extreme point ではない。

Th. 1, 2 の証明は de Leeuw - Rudin [1] をたどればよい。norm 1 の outer functions の closure (色々な位相の) に関しては，

$\boxed{\text{Th. 3}}$ $f \in H^1(U^n)$ が norm 1 の outer functions 全体の norm-closure に属するための必要十分条件は

$\|f\| = 1$, $f(z) \neq 0$ $(z \in U^n)$ である。

$\boxed{\text{Th. 4.}}$ $f\in H^1(U^n)$ が norm 1 の outer functions 全体の weak*-closure に属するための必要十分条件は $\|f\|\leq 1$ で $f(z)\neq 0\ (z\in U^n)$ か又は $f\equiv 0$ である。

Th. 3. 4 の証明も de Leeuw-Rudin [1] を少し変更すれば容易にできる。さて Th. 1 の逆は一次元のときは真であるが、$n\geq 2$ のときはどうかが問題になると思う。しかし、それは次の例によって否定される。

$\boxed{\text{Th. 5.}}$ $\frac{\pi}{4}(z_1+z_2)$ は $H^1(U^n)\ (n\geq 2)$ の単位球 S の extreme point である。

この例は U^n の中で zero をもつから、勿論 outer でない。この証明は §5 で与える。

§4. $H^1(U^n)$ の extremum problem

$\phi\in L^\infty(T^n)$ のとき、T_ϕ を次のように定義する。

$$T_\phi(f)=\int_{T^n} f^*(w)\phi(w)\,dm_n(w)\qquad (f\in H^1(U^n)).$$

又 $S_\phi=\{f\in S\ ;\ T_\phi(f)=\|T_\phi\|=\sup_{g\in S}|T_\phi(g)|\}$ とする。S_ϕ が T_ϕ に対する extremum problem の解の集合である。この時、一次元の時と同じように次の Lemma が成立する。

Lemma 4. $f,g\in S_\phi$

$\Longleftrightarrow$ $\arg f^*(w)=\arg g^*(w)$ a.e. $w\in T^n$ でかつ $\|f\|=\|g\|=1$。

したがって，もし $f \in H^1(U^n)$, $\|f\|=1$ がある S_ϕ に属していれば $S_\phi = S_{f^*/|f^*|}$ と書ける。よってこのとき S^f と書くことにする。すると，次の事実がわかる。

$\boxed{\text{Th. 6.}}$ a) $f \in H^1(U^n)$, $\|f\|=1$, f; outer で $1/f^* \in L^1(T^n)$ ならば S^f は f のみからなる。

b). もし S^f が f のみであれば，f は S の extreme point であり，かつ，すべての inner function $u(z)$ に対して

$f(z)/(1-u(z))^2 \notin H^1(U^n)$ である。 $(n \geq 1)$

$\boxed{\text{Th. 7.}}$ $f \in H^1(U^n)$, $\|f\|=1$, f: outer かつ $1/f^* \in L^p(T^n)$ $(1/2 \leq p \leq 1)$ ならば，$S^f - \{f\}$ は $H^q(U^n)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=2\right)$ の元を含まない。 $(n \geq 1)$

又 Th. 6. 7 の証明の方法を用いて，次の Neuwirth-Newman の定理（及びその n 次元への一般化）の証明を与え得る。

$\boxed{\text{Th. 8.}}$ $f \in H^{1/2}(U^n)$ でかつ $f^*(w) \geq 0$ a.e. on T^n ならば f は constant である。 $(n \geq 1)$

Th. 6 (a) は Th. 7 の特別な場合である。又 Neuwirth-Newman の定理から出発して Th. 7 を証明することもできる

が，§3との関連も考えて，従来の定理を使わずに§6でTh.7を示す。

§5. Th.5の証明

簡単のため$n=2$のときを示す。(他も全く同じやり方でよい。)

Th.5を示すためには，$z_1+z_2=\dfrac{f_1(z_1,z_2)+f_2(z_1,z_2)}{2}$，$f_1,f_2\in H^1(U^2)$，$\|f_1\|=\|f_2\|=\|z_1+z_2\|=\frac{4}{\pi}$ とおいたとき，$f_1=f_2=$ $=z_1+z_2$ が示せればよい。

上のことを仮定すると

$$(1)\quad \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(|f_1^*(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})|+|f_2^*(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})|)d\theta_1 d\theta_2=\frac{8}{\pi}$$

であり，

$$(2)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_1^*(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})+f_2^*(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})|d\theta_1$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|2(e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2})|d\theta_1=\frac{8}{\pi}\qquad a.e.\ \theta_2\in(0,2\pi)$$

である。したがって $m_1E_1=1$ となる可測集合 E_1 があって

$$(3)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|f_1^*(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})|+|f_2^*(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})|)d\theta_1=\frac{8}{\pi}\quad(\theta_2\in E_1)。$$

又，一方 $m_1E_2=1$ となる可測集合 E_2 があって

$$\lim_{r_2\to 1} f_j(z_1, r_2 e^{i\theta_2}) = f_j(z_1, e^{i\theta_2}) \in H^1(U) \quad (j=1,2,\ \theta_2 \in E_2)$$

$$\lim_{r_1\to 1} f_j(r_1 e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = f_j^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \qquad a.e.\ \theta_1 \in (0, 2\pi)$$
$$(\theta_2 \in E_2,\ j=1,2).$$

である (A. Zygmund [4] p. 328)。

$E = E_1 \cap E_2$ とおき,

$\|f_j(z_1, e^{i\theta_2})\|_1 = \alpha_j(\theta_2)$, $j=1,2$, $\theta_2 \in E$ とおく。

すると, (3) によって $\alpha_1(\theta_2) + \alpha_2(\theta_2) = \frac{8}{\pi}$ である。

そこで, $\theta_2 \in E$を一つ固定し, $\alpha_1(\theta_2) \leq \alpha_2(\theta_2)$ と仮定して,

$$g_1(z_1) = f_1(z_1, e^{i\theta_2}) + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\alpha_2} f_2(z_1, e^{i\theta_2})$$

$$g_2(z_1) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_2} f_2(z_1, e^{i\theta_2})$$

とおく。 すると $\|g_j(z_1)\|_1 \leq \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \frac{4}{\pi}$ $(j=1,2)$ である。

$\|z_1 + e^{i\theta_2}\|_1 = \frac{4}{\pi}$ で $z_1 + e^{i\theta_2}$ は outer function であり, 一次元のとき outer function は extreme point であることに注意して, $\frac{g_1(z_1) + g_2(z_1)}{2} = \frac{f_1(z_1, e^{i\theta_2}) + f_2(z_1, e^{i\theta_2})}{2} = z_1 + e^{i\theta_2}$ であることを見れば, $g_j(z_1) = z_1 + e^{i\theta_2}$ $(j=1,2)$ でなければならないことがわかる。 したがって,

$$(4) \qquad f_j(z_1, e^{i\theta_2}) = \frac{\pi}{4}\alpha_j(\theta_2)(z_1 + e^{i\theta_2}) \qquad (j=1,2)$$

を得る。 この表現は明らかに $\alpha_1 > \alpha_2$ のときも成り立つ。

したがって，すべての $\theta_2 \in \tilde{E}$ に対して成り立つ。 さて，$m_1 E_3 = 1$ となる 次のような可測集合 E_3 と $\theta_1 \in (0, 2\pi)$ が存在する，

$$f_1(e^{i\theta_1}, z_2) \in H^1(U)$$

で $\lim_{r_1 \to 1} \lim_{r_2 \to 1} f_1(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) = \lim_{r_2 \to 1} \lim_{r_1 \to 1} f_1(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})$

$= f_1^*(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \qquad \theta_2 \in E_3$。 (A. Zygmund (4), p. 328)

この事実と(4)を使えば，$\alpha_1(\theta_2)$ を U の中に正則に拡張できる。

$$f_1(e^{i\theta_1}, z_2) = \frac{\pi}{4} \alpha_1(z_2)(e^{i\theta_1} + z_2) \qquad (z_2 \in U).$$

ここで $e^{i\theta_1} + z_2$ は outer function であり，$f_1(e^{i\theta_1}, z_2) \in H^1(U)$ だから，$\alpha_1(z_2) \in N_*(U)$ である。 又 $0 \leq \alpha_1(\theta_2) \leq \frac{4}{\pi}$ であるから $\alpha_1(z_2) \in H^\infty(U)$ である (Lemma 2)。 したがって $\alpha_1(z_2)$ は constant でなければならない。 α_1, α_2 の定義も考慮に入れれば $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{4}{\pi}$ が得られる。 これは $f_1 = f_2 = z_1 + z_2$ を示す。 (証明終り)。

§6. Th. 7 の証明

まず，de Leeuw-Rudin (1) p. 471 をよく見ると次のことが分る。

<u>Lemma. 5.</u> $f \in H^p(U)$ $(p \geq 1)$ なら，次のような $g \in H^p(U)$

が存在する，

i) $\|f+g\|_1 = \|f-g\|_1 = \|f\|_1$

したがって，又

$\arg(f^*(w)+g^*(w)) = \arg(f^*(w)-g^*(w)) = \arg f^*(w)$ a.e. $w \in T$.

ii) $f \pm g$ は outer.

これを使って基本的な次の Lemma を得る。

Lemma 6. $f \in H^p(U)$ $(\frac{1}{2} \leq p \leq 1)$ が outer function であるとき，$h \in H^q$ $(1/p + 1/q = 2)$ が $f^* h^* \geq 0$ a.e. on T をみたすならば，fh は constant である。

(証明) $1/2 \leq p \leq 1$ で $1/p + 1/q = 2$ だから $1 \leq q \leq \infty$ である。Lemma 5 によって $\exists g \in H^q(U)$; $h \pm g$ outer, $\arg(h^* \pm g^*) = \arg h^*$ a.e. T。f も $h \pm g$ も outer であるから，zero をもたない，したがって $\sqrt{f} \in H^{2p}(U)$, $\sqrt{h \pm g} \in H^{2q}(U)$ である。これより $\sqrt{f}\sqrt{h \pm g} \in H^1(U)$. 一方 $f^* h^* \geq 0$, $\arg(h^* \pm g^*) = \arg h^*$ a.e. on T より，$f^*(h^* \pm g^*) \geq 0$, a.e. on T を得る。このことは $(\sqrt{f}\sqrt{h \pm g})^*$ が real a.e. on T を示す。$H^1(U)$ の函数の境界値が real であるのだから $\sqrt{f}\sqrt{h \pm g}$ はそれぞれ constant でなければならない。

これから fh も constant でなければならない。(終り)。

(Th. 7 の証明).

f は outer であるから $1/f \in N_*(U^n)$ したがって $1/f^* \in L^1(T^n)$ より $1/f \in H^1(U^n)$ である。これより、殆んど全ての $w \in T^n$ に対して $f_w(\lambda) = f(\lambda w) \in H^1(U)$ であり、$1/f_w(\lambda) \in H^p(U)$ である。さて、$g \in S^f \cap H^p(U^n)$ としよう。すると、Lemma 4 によって、$g_w^*(e^{i\theta})/f_w^*(e^{i\theta}) \geq 0$ a.e. on T である。Lemma 3 より $1/f_w(\lambda)$ が outer であることに注意して、Lemma 6 を使うと、殆んど全ての $g_w/f_w(\lambda)$ は constant である。しかし、一方円板 $\{\lambda w ; |\lambda|<1\}$ は原点で交わるから $g_w/f_w(\lambda) = g/f(0)$ a.e. $w \in T^n$ を得る。g/f は U^n で正則だから、斉次展開することによって $g/f \equiv g/f(0)$ を得る。$\|g\| = \|f\| = 1$ だから $g/f = 1$ でなければならない。(終り)。

(注). Th. 6 は de Leeuw-Rudin [1] の Th. 8 の gap を少し埋めるものである。又次のことがいえる。Th 6. で $1/f^* \in L^1(T^n)$ を $1/f^* \in L^p$ ($0<p<1$) でおきかえることはできない。実際 $f = (1-z_1)^\alpha / \|(1-z_1)^\alpha\|_1$ ($1<\alpha<1/p$) は S^f が少くとも2つの元を含む例である。(但し、$z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$, $n \geq 1$)

参考文献

[1]. K. de Leeuw and W. Rudin, Extreme points and extremum problems in H_1, Pacific J. Math., 8 (1958), 463–485.

[2]. J. Neuwirth and D. J. Newman, Positive $H^{1/2}$ functions are constants, Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 958.

[3]. W. Rudin, Function Theory in Polydiscs, Benjamin 1969.

[4] A. Zygmund, Trigonometrical series II. 1959.